MAT 204 ANALİTİK GEOMETRİ II BÜTÜNLEME SINAVI (04.06.2018)

Adı Soyadı:

Numarası:

1	2	3	4	5	Toplam

1.) $A\,x^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ genel konik denklemine dönme uygulayınız. Dönmeden sonra elde etmiş olduğunuz denklem $A'\,x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0$ olsun. Elde edilen konik denklemi ile esas konik denklemi arasındaki katsayılar arasındaki

$$A' - C' = \pm\sqrt{(A-C)^2 + B^2}$$

bağıntısının sağlandığını gösteriniz$(\mathbf{20P.})$

2.) $\Phi(x,y) = 4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$ koniğine uygun bir öteleme ve dönme uygulayarak standart hale getiriniz ve grafiğini çiziniz$(\mathbf{20P.})$

3.) $d_1 \cdots \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = \quad -t \end{cases}$ doğrusunun

$P \cdots 2x + 2y + z + 4 = 0$ düzlemi üzerindeki izdüşümünü bulunuz$(\mathbf{20P.})$

4.) $\Phi(x,y) = x^2 + 3xy - y^2 + 5x - 1 = 0$ koniğinin $P = (2,3)$ noktasından geçen çapın denklemini ve bu çapa eşlenik olan çapın denklemini bulunuz$(\mathbf{20P.})$

5.) a) $A(0,0), B(0,1), C(1,0), D(1,-1)$ ve $E(-1,2)$ noktalarından geçen koniğin denklemini yazınız ve tipini belirtiniz$(\mathbf{10P.})$

b) $\Phi(x,y) = x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 1 = 0$ koniği ile $P = (-1,0)$ noktası veriliyor. Koniğin, P noktasından geçen teğetlerinin denklemini bulunuz$(\mathbf{10P.})$

NOT: Sorular eşit puanlı olup, süre 90 dakikadır. Prof. Dr. Ayhan TUTAR

CEVAPLAR

C-1) Bütünleme (04.06.2018)

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ genel konik denklemine

$$R_0 \cdots \begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

koordinat eksenlerinin döndürülmesi işlemini uygulayalım:

$$A(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2+B(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+C(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2$$
$$+D(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)+E(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+F=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(A\cos^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha)}_{A'}x'^2+\underbrace{(-2A\sin\alpha\cos\alpha+B\cos^2\alpha-B\sin^2\alpha+2C\cos\alpha\sin\alpha)}_{B'}x'y'+\overbrace{(A\sin^2\alpha-B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha)}^{C'}y'^2$$
$$+\underbrace{(D\cos\alpha-E\sin\alpha)}_{D'}x'+\underbrace{(-D\sin\alpha+E\cos\alpha)}_{E'}y'+F=0$$

$$\Rightarrow \boxed{A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2+D'x'+E'y'+F=0}$$ bulunur.

$$A'-C' = A\cos^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha-A\sin^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha-C\cos^2\alpha$$
$$=(A-C)\cos^2\alpha-(A-C)\sin^2\alpha+2B\sin\alpha\cos\alpha$$
$$=(A-C)\underbrace{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}_{\cos2\alpha}+B\cdot\underbrace{2\sin\alpha\cos\alpha}_{\sin2\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{A'-C'=(A-C)\cos2\alpha+B\sin2\alpha} \quad --- (1)$$

Ayrıca,

$$tg2\alpha=\frac{B}{A-C} \Rightarrow \frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=\frac{B}{A-C} \Rightarrow \boxed{(A-C)\sin2\alpha-B\cos2\alpha=0} \ (2)$$

elde edilir. (1) ifadesinin karesini alırsak,

$$(A'-C')^2=(A-C)^2\cos^2 2\alpha+B^2\sin^2 2\alpha+2B(A-C)\cos2\alpha\cdot\sin2\alpha \quad --- (3)$$

bulunur. Şimdi de (2) ifadesinin karesini alalım

$$(A-C)^2\sin^2 2\alpha+B^2\cos^2 2\alpha-2B(A-C)\cos2\alpha\sin2\alpha=0$$

$\Rightarrow (A-C)^2\sin^2 2\alpha+B^2\cos^2 2\alpha = 2B(A-C)\cos2\alpha\cdot\sin2\alpha$ bulunur.

Bu değeri (3) de yerine yazarsak

$$(A'-C')^2=(A-C)^2\cos^2 2\alpha+B^2\sin^2 2\alpha+(A-C)^2\sin^2 2\alpha+B^2\cos^2 2\alpha$$
$$=(A-C)^2(\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha)+B^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$$

$\Rightarrow A'-C'=\mp\sqrt{(A-C)^2+B^2}$ bulunur.

Bütünleme (04.06.2018)

C-2) $\Phi(x,y) = 4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$ koniğinde

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_x(x,y) = 8x - 4y + 12 \\ \Phi_y(x,y) = -4x + 14y + 6 \end{array}\right] \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - y = -3 \\ -2x + 7y = -3 \end{array}\right] \Rightarrow \delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$$ olduğundan simetri merkezi vardır. Simetri merkezi $O'(h,k)$ olsun.

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_x\big|_{O'} = \Phi_x(h,k) = 2h - 4k + 12 \\ \Phi_y\big|_{O'} = \Phi_y(h,k) = -4h + 14k + 6 \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Phi_x\big|_{O'} = 0 \\ \Phi_y\big|_{O'} = 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} 2h - k = -3 \\ + \; -2h + 7k = -3 \\ \hline k = -6 \Rightarrow k = -1. \end{array}$$

$k = -1$ için $2h = -3 + k \Rightarrow 2h = -3 - 1 \Rightarrow h = -2$. Buna göre, $O'(-2,-1)$.

$$\left.\begin{array}{l} x = x' - 2 \\ y = y' - 1 \end{array}\right]$$ ötelemesi uygulanırsa

$$4(x'-2)^2 - 4(x'-2)(y'-1) + 7(y'-1)^2 + 12(x'-2) + 6(y'-1) - 9 = 0$$

$$\Rightarrow 4(x'^2 - 4x' + 4) - 4(x'y' - x' - 2y' + 2) + 7(y'^2 - 2y' + 1) + 12x' - 24 + 6y' - 6 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow 4x'^2 - \cancel{16x'} + 16 - 4x'y' + \cancel{4x'} + 8y' - 8 + 7y'^2 - 14y' + 7 + \cancel{12x'} - 24 + 6y' - 15 = 0$$

$$\Rightarrow 4x'^2 - 4x'y' + 7y'^2 - 24 = 0$$ bulunur.

$A = 4$, $B = -4$, $C = 7$ dir.

$A' + C' = A + C$ den $A' + C' = 4 + 7 = 11$.

$$A' - C' = -\sqrt{(A-C)^2 + B^2} = -\sqrt{(4-7)^2 + (-4)^2} = -\sqrt{25} = -5$$

($B < 0$ olduğu halde $A' - C' = -\sqrt{(A-C)^2 + B^2}$, $B > 0$ iken $A' - C' = \sqrt{(A-C)^2 + B^2}$.)

$$\left.\begin{array}{l} A' + C' = 11 \\ A' - C' = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow 2A' = 6 \Rightarrow A' = 3,$$ $C' = 11 - A'$ den $C' = 8$ bulunur.

Buna göre öteleme ve dönme sonrasından oluşan konik denklemi

$$3x''^2 + 8y''^2 - 24 = 0 \Rightarrow \frac{x''^2}{8} + \frac{y''^2}{3} = 1$$ elips denklemidir.

II. Yol:

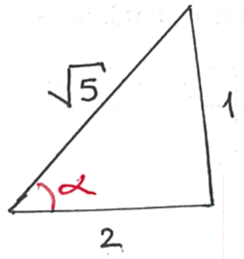
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{B}{A-C} = \frac{-4}{4-7} = \frac{4}{3}.$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3\operatorname{tg}\alpha = 2(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)$$

$$\Longrightarrow (2\operatorname{tg}\alpha - 1)(\operatorname{tg}\alpha + 2) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}, \underbrace{\operatorname{tg}\alpha = -2}$$

Bu durumda α açısı geniş açı olur. Biz dar açıyı alıyoruz.

Bütünleme (04.06.2018)



$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ dir. O halde

$$\left.\begin{aligned} x' &= x''\cos\alpha - y''\sin\alpha \\ y' &= x''\sin\alpha + y''\cos\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x' &= \frac{2}{\sqrt{5}}x'' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'' \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{5}}x'' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'' \end{aligned}\right\}$$

dönme denklemi yardımı ile $x''O'y''$ koordinat sisteminde konişin standart denklemi

$$3x''^2 + 8y''^2 - 24 = 0$$

bulunur.

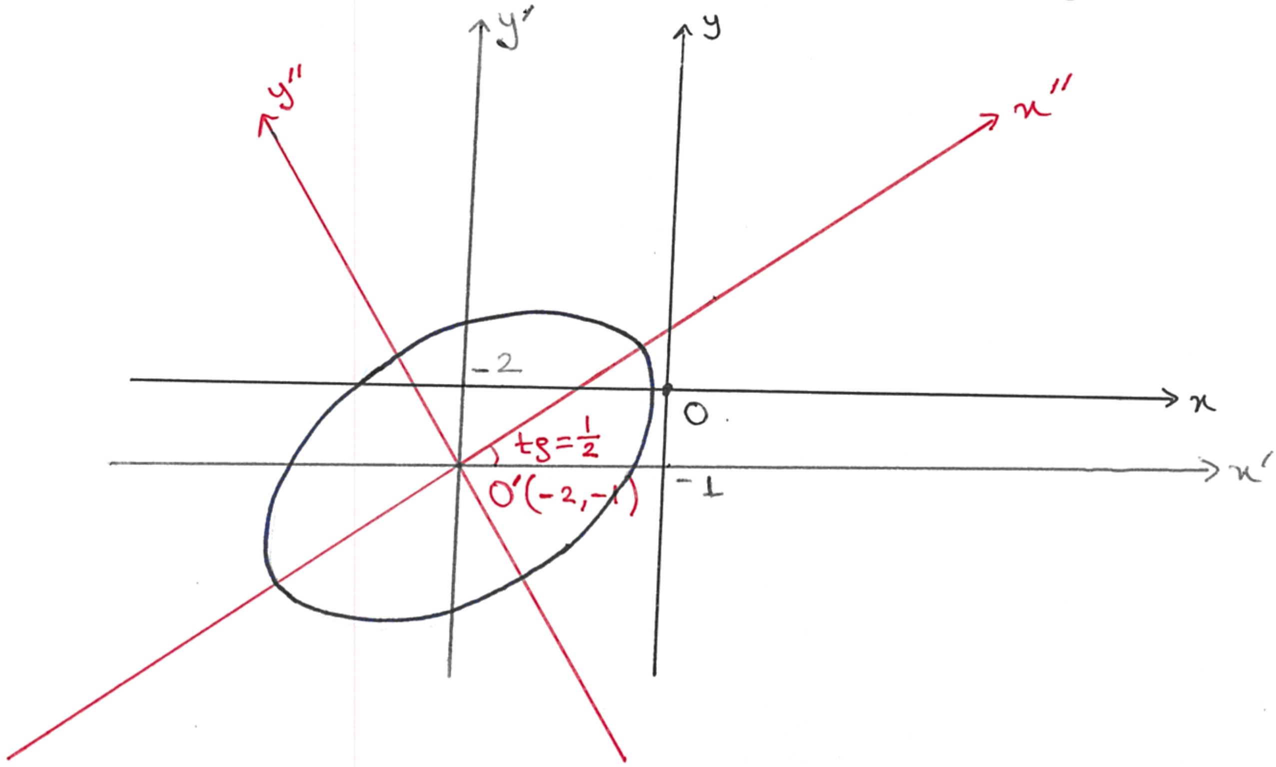
> Veya aşağıdaki gibi $\sin\alpha$ ve $\cos\alpha$ değerleri hesaplanabilir:

$$\sin 2\alpha = \frac{tg 2\alpha}{\sqrt{1+tg^2 2\alpha}} = \frac{4/3}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{5} = \frac{4}{5},$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 2\alpha}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}.$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} = \frac{1-3/5}{2} = \frac{2/5}{2} = \frac{\cancel{2}}{5}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} = \frac{1+3/5}{2} = \frac{8}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$



Bütünleme (04.06.2018)

C-3) $d \ldots \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = -t \end{cases} \Rightarrow d \ldots \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{-1} = t$ dir.

$\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{3} \Rightarrow R_1 \ldots 3x + y - 5 = 0$

$\dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{-1} \Rightarrow R_2 \ldots -y - 3z + 2 = 0$ dir. Şimdi R_1 ve R_2 düzlemlerini içeren düzlem demetini bulalım:

$$3x + y - 5 + \lambda(-y - 3z + 2) = 0 \Rightarrow 3x + (1-\lambda)y - 3\lambda z + 2\lambda - 5 = 0.$$

d doğrusunun P düzlemi üzerindeki izdüşüm doğrusunun bulunması için yukarıdaki düzlem demetinin öyle bir λ değeri için Q izdüşüm düzlemi bulunmalıdır. Yani,

$\vec{n} = (3, (1-\lambda), -3\lambda)$ ve $\vec{n}_P = (2, 2, 1)$ vektörleri için

$\langle \vec{n}, \vec{n}_P \rangle = 0 \Rightarrow 6 + 2 - 2\lambda - 3\lambda = 0 \Rightarrow 5\lambda = 8 \Rightarrow \lambda = \dfrac{8}{5}$ bulunur.

$\lambda = \dfrac{8}{5}$ için Q izdüşüm düzlem denklemi

$Q \ldots 3x + \left(1 - \dfrac{8}{5}\right)y - 3 \cdot \dfrac{8}{5} z + 2 \cdot \dfrac{8}{5} - 5 = 0$ dan

$Q \ldots 15x - 3y - 24z - 9 = 0$ bulunur.

P ve Q düzlemlerinin arakesiti bulunarak istenilen izdüşüm doğrusu elde edilir.

$$\begin{cases} P \ldots 2x + 2y + z + 4 = 0 \\ Q \ldots 15x - 3y - 24z - 9 = 0 \end{cases}$$

sisteminden

$$\left.\begin{aligned} 3/\quad & 2x + 2y = -4 - z \\ 2/\quad & 15x - 3y = 24z + 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} & 6x + 6y = -12 - 3z \\ + \; & 30x - 6y = 48z + 18 \\ \hline & 36x = 45z + 6 \end{aligned}$$

$z = k$ dersek $x = \dfrac{5}{4}k + \dfrac{1}{6}$, $y = -\dfrac{7k}{4} - \dfrac{13}{6}$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \ldots \dfrac{x - \frac{1}{6}}{5/4} = \dfrac{y + \frac{13}{6}}{-\frac{7}{4}} = \dfrac{z}{1} = k}$$ elde edilir.

C-4) İlk önce koniğin tipini bulalım:

$\Delta = 4AC - B^2 = 4.1.(-1) - 3^2 = -9 - 4 = -13 < 0$ olup, konik hiperbol sınıfındandır.

$$K = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -156 \neq 0$$ olup, konik hiperboldür.

O halde, konik merkeze sahiptir. Çap, merkezden geçeceğinden, $M = (x_0, y_0)$ o.ü.

$$\left.\begin{aligned} \Phi_x\Big|_M = 0 &\Rightarrow 2x_0 + 3y_0 + 5 = 0 \\ \Phi_y\Big|_M = 0 &\Rightarrow 3x_0 - 2y_0 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_0 = -\frac{10}{13} \text{ ve } y_0 = -\frac{15}{13} \text{ olup,}$$

$M = \left(-\frac{10}{13}, -\frac{15}{13}\right)$ elde edilir.

Buna göre, M ve P noktalarından geçen doğru denklemi

$$\frac{x + \frac{10}{13}}{-\frac{10}{13} - 2} = \frac{y + \frac{15}{13}}{-\frac{15}{13} - 3} \Longrightarrow \frac{13x + 10}{4} = \frac{13y + 15}{6}$$

$$\Longrightarrow 4.13y + 60 = 6.13x + 60$$

$$\Longrightarrow 3x - 2y = 0 \text{ bulunur.}$$

Şimdi, bu çapın eşleniğini bulalım: $L(x,y)$ olmak üzere

$$\Phi_x\Big|_L + m\,\Phi_y\Big|_L = 0 \Rightarrow 2x + 3y + 5 + \frac{3}{2}(3x - 2y) = 0$$

$$\Longrightarrow 2x + \cancel{3y} + 5 + \frac{9}{2}x - \cancel{3y} = 0$$

$$\Longrightarrow 4x + 9x + 10 = 0$$

$$\Longrightarrow 13x + 10 = 0$$

elde edilir.

C-5) a) $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ konik denkleminde verilen noktaları yerlerine yazalım:

$A(0,0)$ için $F=0$,

$B(0,1)$ için $C+E+F=0 \Rightarrow C+E=0 \Rightarrow C=-E$,

$C(1,0)$ için $A+D+F=0 \Rightarrow A=-D$,

$D(1,-1)$ için $A-B+C+D-E+F=0 \Rightarrow -\cancel{D}-B-E+\cancel{D}-E=0$

$\Rightarrow B=-2E$,

$E(-1,2)$ için $A-2B+4C-D+2E+F=0 \Rightarrow -D-2B-4E-D-B=0$

$\Rightarrow -2D-3B-4E=0 \Rightarrow -2D-3B+2B=0$

$\Rightarrow -2D-B=0 \Rightarrow -2E=-2D \Rightarrow D=E$.

O halde, $F=0$; $A=C=-E$; $B=-2E$, $D=E$ bulunur.

$E=1$ için $A=C=-1$, $B=-2$, $D=E=1$ dir. O halde, verilen noktalardan geçen konik denklemi

$-x^2-2xy-y^2+x+y=0$ veya $x^2+2xy+y^2-x-y=0$ dır.

$\Delta=4AC-B^2=4.1.1-(2)^2=0$ olduğundan konik parabol sınıfındandır.

$$K=\begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

olduğundan; paralel ya da çakışık bir çift doğrudur.

b) $\Phi(x,y)\big|_P=\Phi(-1,0)=1-2+1=0$ olduğundan P, konik üzerindedir.

$d \ldots y-y_0=m(x-x_0)$ dan $d \ldots y=m(x+1)$ olup,

$x^2+4xm(x+1)+4m^2(x+1)^2+2x+1=0$

$\Rightarrow (1+4m+4m^2)x^2+(8m^2+4m+2)x+4m^2+1=0$.

Bir tek noktadan teğet old. dan $\delta=b^2-4ac=0$ şartından

$\cancel{2}^2(4m^2+2m+1)^2-\cancel{4}(1+4m+4m^2)(4m^2+1)=0 \Rightarrow 4m^2=0 \Rightarrow m_{1,2}=0$.

O halde

$y=m(x+1)$ den $y=0$ doğrusu elde edilir.